

# Flux multi-commodités avec contraintes de délais

Guillaume Beraud-Sudreau<sup>1,3</sup>, Walid Ben-Ameur<sup>2</sup>, Hervé Kérivin<sup>3</sup>, Sébastien Martin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Huawei Technologies France, Boulogne-Billancourt, France

<sup>2</sup> SAMOVAR, Télécom SudParis, Institut Polytechnique de Paris, Palaiseau, France

<sup>3</sup> Université Clermont Auvergne, CNRS, Clermont Auvergne INP, Clermont-Ferrand, France

**Mots-clés :** *optimisation sur les réseaux, télécommunications, optimisation non-linéaire.*

## 1 Introduction

Les réseaux de télécommunication voient une augmentation constante des flux liés aux services en temps réel (voix sur IP, jeux vidéo, entraînement de grands réseaux de neurones...), lesquels nécessitent des garanties de délai de transmission. Le routage de tels services requiert idéalement de contrôler le délai maximum associé à chaque chemin emprunté, qui peut être exprimé comme la somme des délais de chaque lien du chemin. Si le délai associé à un lien est considéré comme constant, l'optimisation d'un tel routage ne pose pas de difficultés algorithmiques. Cependant, le délai associé à un équipement télécom augmente fortement avec sa charge ; cette dépendance est bien modélisée par la fonction de délai moyen d'une file M/M/1  $d(y) = \frac{1}{c-y}$  où  $y$  représente la charge de l'équipement et  $c$  la capacité de l'équipement. On remarque que, lorsque la capacité résiduelle  $c - y$  tend vers 0, le délai associé explose.

Dans ce travail, nous étudions le routage de services en temps réel modélisé comme un flux multi-commodités soumis à des contraintes de délais. Les délais des chemins utilisés par les commodités dépendent, via une fonction de délais moyen d'une file M/M/1, de la charge de chacun des arcs traversés par ces chemins. L'objectif sera de maximiser la proportion de chaque commodité transportée ("concurrent multi-commodity flow").

Le problème de flux multi-commodités avec contraintes de délais a été formalisé en 2003 par Beker et al. dans le domaine des télécommunications [1]. Par la suite, la complexité du problème ainsi que certaines relaxations convexes ont été étudiées par Ben-Ameur et Ouorou en 2006 [2]. Hijazi et al. [3] ont introduit une nouvelle relaxation du problème dans laquelle une variable binaire est associée à chaque chemin ; cette variable vaut 0 si le chemin n'est pas utilisé et 1 s'il l'est. L'ensemble des solutions réalisables est contenu dans deux sous-ensembles de deux hyperplans définis par cette nouvelle variable. Les auteurs construisent l'enveloppe convexe de ces deux sous-ensembles, puis en déduisent une relaxation des contraintes de délais qu'ils peuvent comparer avec une reformulation "Big-M" des contraintes dans des expériences numériques. Hijazi et Ouorou [4] ont par la suite montré que la relaxation "Big-M" du problème peut être simplement linéarisée, permettant une résolution efficace du problème à l'aide d'une approximation extérieure ("outer-approximation").

Le réseau de télécommunication peut être modélisé comme un graphe  $G = (V, A)$  dont chaque arc  $a \in A$  est doté d'une capacité  $c_a$  ; les communications sont modélisées comme un ensemble  $K$  de demandes (ou commodités) avec, pour chaque demande  $k \in K$ , une source  $s_k \in V$ , une destination  $t_k \in V$ , un volume  $b^k$  et un délai maximum  $d^k$ . Chaque demande peut emprunter un ensemble  $P^k$  de chemins allant de  $s_k$  à  $t_k$ . Le problème peut être modélisé comme un programme non-linéaire dont les variables  $x_p^k$  correspondent, pour chaque demande  $k \in K$  et chemin  $p \in P^k$ , à la proportion de la demande  $k$  empruntant le chemin  $p$  ; Les variables  $y_a$  représentent la charge du lien  $a \in A$ , et la variable  $\gamma$  représente la proportion minimum envoyée de  $s_k$  à  $t_k$  par chacune des demandes  $k \in K$ . Le problème *DCMCF* (pour Delay Constrained

Multi-Commodity Flow) peut donc s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned} \text{DCMCF :} \quad & \max \gamma \\ & \sum_{p \in P^k} x_p^k \geq \gamma \quad \forall k \in K, \end{aligned} \quad (1)$$

$$y_a \geq \sum_{k \in K, p \in P^k | a \in p} x_p^k \quad \forall a \in A, \quad (2)$$

$$y_a \leq c_a \quad \forall a \in A, \quad (3)$$

$$\sum_{a \in p} \frac{1}{c_a - y_a} \leq d^k \quad \text{si } x_p^k > 0 \quad \forall k \in K, p \in P^k, \quad (4)$$

$$x_p^k \geq 0 \quad \forall k \in K, p \in P^k, \quad (5)$$

où l'objectif est de maximiser la part  $\gamma$  de chacune des demandes transportées ; cette part est définie par les Contraintes (1). Les Contraintes (2) lient la charge d'un arc avec le volume des demandes qui le traversent, tandis que les Contraintes (3) garantissent que la capacité de chaque arc est bien respectée. Les contraintes de délais, spécifiques à cette étude, sont représentées par les Contraintes (4) ; il est important de noter que l'activation de ces contraintes est conditionnée par l'utilisation de chaque chemin. Ainsi, si un chemin  $p \in P^k$  n'est pas utilisé, la proportion  $x_p^k$  de la demande  $k \in K$  l'empruntant est nulle et le délai du chemin correspondant n'est pas limité ; dès que  $x_p^k$  devient strictement positif, le délai devient contraint. Ces contraintes conditionnelles peuvent être reformulées de manière analytique par

$$\sum_{a \in p} \frac{x_p^k}{c_a - y_a} \leq x_p^k d^k \quad \forall k \in K, p \in P^k. \quad (6)$$

Si  $x_p^k = 0$ , cette contrainte est satisfaite de manière triviale, et si  $x_p^k > 0$  le délai du chemin  $p$  doit être respecté. On remarque que les contraintes de délais sont non-convexes, aussi bien pour les Contraintes (4) que pour les Contraintes (6), ce qui rend le problème difficile.

## 2 Complexité

La NP-difficulté, au sens faible, du problème a été démontrée par Ben-Ameur et Ouorou [2] en utilisant une réduction du problème de bi-partition. Le résultat suivant renforce cette propriété :

**Proposition 1.** *Le problème DCMCF est NP-difficile au sens fort, même dans le cas où il ne compte que 3 demandes qui partagent la même source et la même destination.*

Cette propriété peut être prouvée par réduction du problème de 3-partition, qui est fortement NP-complet. Une instance du problème DCMCF est construite, dans laquelle un ensemble de sommets correspond aux objets du problème de 3-partition, un autre ensemble de sommets correspond aux partitions du problème. Les chemins utilisés par l'une des demandes, qui passent par l'un des sommets de chacun de ces deux sous-ensembles associent chaque objet à une partition et définissent ainsi une solution du problème de 3-partition.

## 3 Relaxation convexe

### 3.1 Etude de la fonction de délai

Nous proposons de construire une relaxation convexe des contraintes de délais exprimées par les Contraintes (6) en calculant l'enveloppe convexe de chaque terme de la somme  $\sum_{a \in p} \frac{x_p^k}{c_a - y_a}$ . Dans ce but, nous définissons la fonction  $f$  définie par  $f(x, y) = \frac{x}{1-y}$  pour  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1[$ .

Les contraintes (6) peuvent être exprimées comme :

$$\sum_{a \in p} f\left(\frac{b^k x_p^k}{c_a}, \frac{y_a}{c_a}\right) \leq b^k x_p^k d^k \quad \forall k \in K, p \in P^k. \quad (7)$$

Afin de calculer une relaxation convexe  $\check{f}$  de  $f$  aussi serrée que possible, nous pouvons restreindre le domaine de celle-ci à l'espace des variables du problème, pour chaque commodité  $k \in K$ , chemin  $p \in P^k$  et arc  $a \in p$  :

- Afin de respecter les délais des différentes demandes, la charge  $y_a$  de l'arc  $a$  admet une borne supérieure  $u_a < c_a$  ; en utilisant le changement de variable  $y = \frac{y_a}{c_a}$  on peut donc supposer qu'il existe un  $\epsilon = \frac{c_a - u_a}{c_a} \in ]0, 1]$  tel que  $y < 1 - \epsilon$
- la borne inférieure de la charge  $y_a$  est notée  $l_a \in [0, u_a]$  ; il existe donc un  $\eta = \frac{l_a}{c_a} \in [0, 1 - \epsilon]$  tel que  $y \geq \eta$ ,
- la borne inférieure du trafic résiduel sur l'arc  $a$ ,  $l_{a_k}^p = \inf(y_a - b_k x_p^k)$ , est notée  $l_{a_k}^p \in [0, u_a - l_a]$  ; il existe donc un  $\theta = \frac{l_{a_k}^p}{c_a} \in [0, 1 - \epsilon - \eta]$  tel que  $y \geq x + \theta$ ,
- la borne supérieure de l'utilisation  $x_p^k$  est notée  $u_p^k \in [0, u_a - l_{a_k}^p]$  ; il existe donc un  $\zeta = \frac{b^k u_p^k}{c_a} \in [0, 1 - \epsilon - \theta]$  tel que  $x \leq 1 - \zeta$ .

Ces différentes contraintes sur les variables  $x_p^k$  et  $y_a$  permettent d'étudier la fonction  $f$  sur le domaine  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : y \geq x + \theta, y \in [\eta, 1 - \epsilon], x \leq 1 - \zeta\}$ . Ces bornes peuvent être calculées de manière analytique [2] ou via des problèmes d'optimisation sous contrainte.

### 3.2 Convexification de la fonction

Afin de calculer l'enveloppe convexe de  $f$  sur  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$ , nous représentons ce domaine comme l'union de 3 ensembles :  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta} = \mathcal{R}_{\epsilon, \theta, \eta} \cup \mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta} \cup \mathcal{T}_{\epsilon, \theta, \zeta}$ , avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\epsilon, \theta, \eta} &= \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : y \geq \eta, \quad y \leq 1 - \epsilon - \frac{1 - \epsilon - \eta}{\eta - \theta} x \right\}, \\ \mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta} &= \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : y \geq x + \theta, \quad y \geq 1 - \epsilon - \frac{1 - \epsilon - \eta}{\eta - \theta} x, \quad y \leq 1 - \epsilon - \frac{\zeta - \epsilon - \theta}{1 - \zeta} x \right\}, \\ \mathcal{T}_{\epsilon, \theta, \zeta} &= \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : y \leq 1 - \epsilon, \quad x \leq 1 - \zeta, \quad y \geq 1 - \epsilon - \frac{\zeta - \epsilon - \theta}{1 - \zeta} x \right\}. \end{aligned}$$

La Figure 1a représente visuellement l'ensemble  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$  et les trois sous-ensembles qui le composent. Nous pourrions calculer l'enveloppe convexe de  $f$  sur chacun de ces ensembles, et montrer que l'enveloppe de  $f$  sur  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$  est le maximum des trois fonctions ainsi créées.

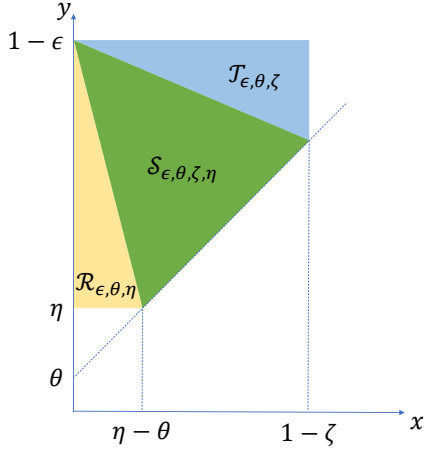
### 3.3 Calcul des enveloppes convexes de $f$ sur $\mathcal{R}_{\epsilon, \theta, \eta}$ , $\mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$ et $\mathcal{T}_{\epsilon, \theta, \zeta}$

Nous présentons dans cette section le calcul de l'enveloppe convexe sur l'ensemble  $\mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$  et nous nous contentons de donner les formulations pour les deux autres sous-ensembles de  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$  ; celles-ci pouvant être obtenues en suivant un raisonnement similaire.

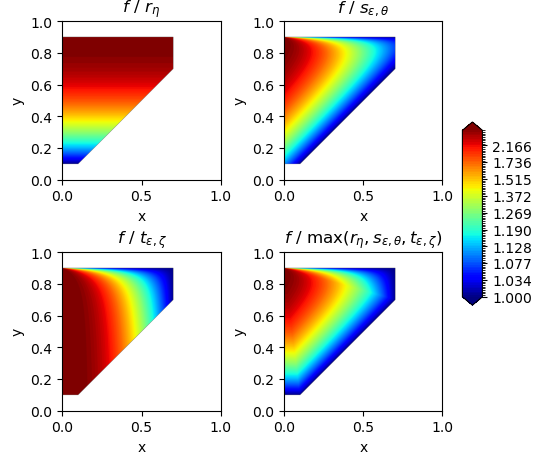
**Proposition 2.** *La fonction  $s_{\epsilon, \theta} : \mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $s_{\epsilon, \theta}(x, y) = \frac{x}{1 - \theta - \frac{x}{1 - \frac{y - x - \theta}{1 - \epsilon - \theta}}}$  si  $(x, y) \neq (0, 1 - \epsilon)$ , et  $s_{\epsilon, \theta}(0, 1 - \epsilon) = 0$  est un sous-estimateur convexe de  $f$  sur  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$  et sa restriction à  $\mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$  est l'enveloppe convexe  $\check{f}_{\mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}}$  de  $f$  sur cet ensemble.*

*Démonstration.* On peut vérifier simplement que  $s_{\epsilon, \theta}$  est continue en  $(0, 1 - \epsilon)$  et que son dénominateur est strictement positif sur  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$ .

Nous pouvons maintenant prouver que  $s_{\epsilon, \theta}(x, y)$  est convexe sur  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$  : pour cela, nous considérons la fonction convexe  $f_\theta$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f_\theta(x) = f(x, x + \theta) = \frac{x}{1 - x - \theta}$ . La fonction perspective de  $f$ ,  $p_s(x, t) = t f_\theta\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{1 - \theta - \frac{x}{t}}$  est donc également convexe. Comme  $s_{\epsilon, \theta}(x, y) = p_s\left(x, 1 - \frac{y - x - \theta}{1 - \epsilon - \theta}\right)$  est la composition d'une fonction convexe et de fonctions affines, elle est donc également convexe.



(a) Représentation du domaine  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$  de la fonction  $f$  comme l'union  $\mathcal{R}_{\epsilon, \theta, \eta} \cup \mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta} \cup \mathcal{T}_{\epsilon, \theta, \zeta}$



(b) Erreurs multiplicatives de  $r_{\eta}$ ,  $s_{\epsilon, \theta}$ ,  $t_{\epsilon, \zeta}$  et  $\check{f}_{\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}}$  avec  $\epsilon = 0.1$ ,  $\zeta = 0.3$ ,  $\eta = 0.1$ , et  $\theta = 0$ . Les valeurs sont moins élevées (en bleu) quand les relaxations sont plus proches de  $f$ .

Afin de montrer que  $s_{\epsilon, \theta}$  est dominée par  $f$  sur  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$  pour  $x > 0$ , nous devons prouver que, pour  $(x, y) \in \mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$ ,  $\frac{s_{\epsilon, \theta}(x, y)}{f(x, y)} = \frac{1-y}{1-\theta - \frac{x}{1-\epsilon-\theta}} = \frac{(1-y)(1-\epsilon+x-y)}{(1-\theta)(1-\epsilon+x-y)-x(1-\epsilon-\theta)}$  est plus petit que 1. En observant la différence entre le numérateur et le dénominateur nous obtenons :  $(1-y)(1-\epsilon+x-y) - (1-\theta)(1-\epsilon+x-y) + x(1-\epsilon-\theta) = (\theta+x-y)(1-\epsilon-y)$  qui est manifestement négatif sur  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$ . Pour  $x = 0$ , les deux fonctions sont nulles.

Nous pouvons enfin restreindre notre analyse à  $\mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$ . Puisque  $s_{\epsilon, \theta}$  est une fonction convexe dominée par  $f$ , nous savons que  $\check{f}_{\mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}} \geq s_{\epsilon, \theta}$ . Pour prouver que  $\check{f}_{\mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}} \leq s_{\epsilon, \theta}$ , considérons un point  $(x, y) \in \mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$ , et notons  $\alpha = \frac{1-\epsilon+x-y}{1-\epsilon-\theta}$  et  $x_0 = y_0 - \theta = \frac{x}{\alpha}$ . On observe que  $(x_0, y_0)$  et  $(0, 1-\epsilon)$  sont dans  $\mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$ , et  $(x, y)$  est une combinaison convexe de  $(x_0, y_0)$  et  $(0, 1-\epsilon)$  :  $(x, y) = \alpha(x_0, y_0) + (1-\alpha)(0, 1-\epsilon)$ . Par ailleurs, on peut simplement vérifier que  $s_{\epsilon, \theta}(x, y) = \alpha f(x_0, y_0) + (1-\alpha)f(0, 1-\epsilon)$ . Par convexité de  $\check{f}_{\mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}}$ , on déduit que  $\check{f}_{\mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}} \leq s_{\epsilon, \theta}$ , et donc que  $s_{\epsilon, \theta}$  est l'enveloppe convexe de  $f$  sur  $\mathcal{S}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$ .  $\square$

**Proposition 3.** La fonction  $r_{\eta} : \mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $r_{\eta}(x, y) = \frac{x}{1-\eta}$  est un sous-estimateur convexe de  $f$  sur  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$  et sa restriction à  $\mathcal{R}_{\epsilon, \theta, \eta}$  est l'enveloppe convexe  $\check{f}_{\mathcal{R}_{\epsilon, \theta, \eta}}$  de  $f$  sur cet ensemble.

**Proposition 4.** La fonction  $t_{\epsilon, \zeta} : \mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $t_{\epsilon, \zeta}(x, y) = \frac{x^2}{(1-\zeta)(1-\epsilon)+\epsilon x-(1-\zeta)y}$  si  $(x, y) \neq (0, 1-\epsilon)$ , et  $t_{\epsilon, \zeta}(0, 1-\epsilon) = 0$  est un sous-estimateur convexe de  $f$  sur  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$  et sa restriction à  $\mathcal{T}_{\epsilon, \theta, \zeta}$  est l'enveloppe convexe  $\check{f}_{\mathcal{T}_{\epsilon, \theta, \zeta}}$  de  $f$  sur cet ensemble.

*Démonstration.* Les Propositions 3 et 4 peuvent être démontrées en suivant des raisonnements similaires à la preuve de la Proposition 2.  $\square$

### 3.4 Enveloppe convexe de $f$ sur $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$ et relaxation du problème DCMCF

**Proposition 5.** La fonction  $\check{f}_{\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}} : \mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\check{f}_{\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}}(x, y) = \max(r_{\eta}(x, y), s_{\epsilon, \theta}(x, y), t_{\epsilon, \zeta}(x, y))$$

est l'enveloppe convexe de  $f$  sur  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$ .

*Démonstration.* D'après les Propositions 2, 3 et 4, nous savons que les trois fonctions  $r_{\eta}$ ,  $s_{\epsilon, \theta}$  et  $t_{\epsilon, \zeta}$  sont convexes et majorées par  $f$ . Leur maximum est donc également convexe et majoré par  $f$ . L'enveloppe convexe de  $f$  majore donc  $\max(r_{\eta}(x, y), s_{\epsilon, \theta}(x, y), t_{\epsilon, \zeta}(x, y))$  sur  $\mathcal{X}_{\epsilon, \theta, \zeta, \eta}$ . D'après la Proposition 3 (resp. 2 et 4), nous savons que  $r_{\eta}$  (resp.  $s_{\epsilon, \theta}$  et  $t_{\epsilon, \zeta}$ ) est

l'enveloppe convexe de  $f$  sur  $\mathcal{R}_{\epsilon,\theta,\eta}$  (resp.  $\mathcal{S}_{\epsilon,\theta,\zeta,\eta}$  et  $\mathcal{T}_{\epsilon,\theta,\zeta}$ ). Nous pouvons donc en déduire que  $\max(r_\eta(x, y), s_{\epsilon,\theta}(x, y), t_{\epsilon,\zeta}(x, y))$  domine l'enveloppe convexe de  $f$  sur  $\mathcal{R}_{\epsilon,\theta,\eta}$  (resp.  $\mathcal{S}_{\epsilon,\theta,\zeta,\eta}$  et  $\mathcal{T}_{\epsilon,\theta,\zeta}$ ), et donc sur  $\mathcal{X}_{\epsilon,\theta,\zeta,\eta}$ .  $\square$

La Figure 1b permet de visualiser les erreurs relatives entre la fonction  $f$  et les différents sous-estimateurs convexes décrits ci-dessus.

En utilisant l'enveloppe convexe de  $f$  sur  $\mathcal{X}_{\epsilon,\theta,\zeta,\eta}$  et les relations entre les bornes données Section 3.1, nous pouvons proposer la relaxation convexe du problème *DCMCF* suivante :

$$\begin{aligned} DCMCF_{env} : \quad & \max \gamma \\ & (1), (2), (3), (5), \\ & \sum_{a \in P} \check{f}_{\mathcal{X}_{\epsilon,\theta,\zeta,\eta}} \left( \frac{c_a - u_a}{c_a}, \frac{l_a^p}{c_a}, \frac{c_a - b^k u_p^k}{c_a}, \frac{l_a}{c_a}, \left( \frac{b^k x_p^k}{c_a}, \frac{y_a}{c_a} \right) \right) \leq b^k x_p^k d^k \quad \forall k \in K, p \in P^k. \end{aligned} \quad (8)$$

Une comparaison de  $DCMCF_{env}$  avec les relaxations proposées par [3] permet de montrer que la relaxation proposée est plus resserrée que cette dernière. En effet, la relaxation proposée par Hijazi et al. est équivalente à ne considérer que les fonctions  $r_\eta(x, y)$  et  $s_{\epsilon,\theta}(x, y)$  dans la définition de la fonction  $\check{f}_{\mathcal{X}_{\epsilon,\theta,\zeta,\eta}}$ , ignorant donc un des termes du max et obtenant ainsi un sous-estimateur convexe moins proche de la fonction  $f$ .

## 4 Qualité de la relaxation

**Proposition 6.** *Etant donné les scalaires  $\alpha > 1$ ,  $\beta \geq \frac{\min_k b^k}{\max_k b^k}$  et  $|P| \geq \max_k |P^k|$ , il existe un algorithme polynomial d'approximation du problème *DCMCF* de taux  $\frac{\beta}{4(\alpha|K|(|P|-1)+\beta)}$ .*

*Démonstration.* La preuve de la Proposition 6 étant relativement longue, nous n'en donnerons ici qu'une esquisse.

Tout d'abord, on peut montrer que, quel que soit  $x_0 \in [0, 1 - \zeta]$ , pour tout  $(x, y) \in \mathcal{X}_{\epsilon,\theta,\zeta,\eta}$  tel que  $x \geq x_0$ , on a  $f(\lambda x, \lambda y) \leq \lambda \check{f}_{\mathcal{X}_{\epsilon,\theta,\zeta,\eta}}(x, y)$  avec  $\lambda \leq \frac{4x_0(1-\epsilon)}{(1-\epsilon+x_0)^2}$ .

Nous pouvons ensuite construire une solution du problème *DCMCF* à partir d'une solution du problème  $DCMCF_{env}$  dont les valeurs des variables sont notées par des  $\tilde{\cdot}$ . Cette solution est construite en fixant à zéro toutes les variables  $x_p^k$  telles que  $\tilde{x}_p^k \leq \frac{\tilde{\gamma}}{\psi|P^k|}$  (avec un  $\psi \geq 1$  dont la valeur est optimisée), puis en multipliant les autres par le facteur  $\lambda = \min_{k,p,a} \psi|P^k| \frac{4b^k \tilde{\gamma} u_a}{(u_a \psi|P^k| + b^k \tilde{\gamma})^2}$ . Grâce à la relation décrite ci-dessus, nous pouvons prouver que la solution ainsi créée est bien une solution réalisable de *DCMCF*.

Pour tout arc  $a \in A$ , on peut construire en un temps polynomial une borne supérieure  $u_a \leq \alpha|K| \max_k b^k \tilde{\gamma}$ , et ainsi montrer que  $\lambda \geq \frac{\psi|P||K|\alpha\beta}{(\alpha\psi|K||P|+\beta)^2}$  avec  $\beta \geq \frac{\min_k b^k}{\max_k b^k}$  et  $|P| \geq \max_k |P^k|$ .

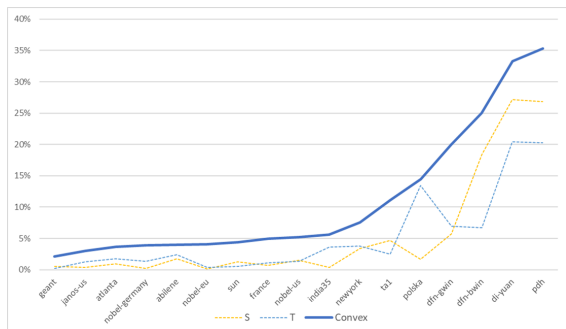
Il est enfin possible de montrer que le rapport entre la solution du problème *DCMCF* ainsi créée et la solution  $\tilde{\gamma}$  de la relaxation  $DCMCF_{env}$  est au moins  $\frac{\beta}{4(\alpha|K|(|P|-1)+\beta)}$ , ce qui prouve Proposition 6.  $\square$

## 5 Expériences numériques

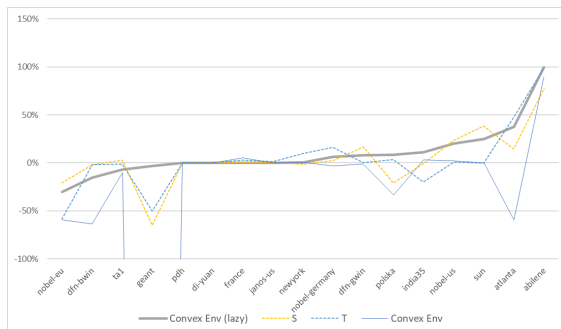
Afin de comparer empiriquement les différentes relaxations, celles-ci ont été implémentées à l'aide de SCIP 9 en C++ et testées sur les instances de la librairie SND-Lib. Pour chaque commodité  $k \in K$ , l'ensemble de chemins  $P^k$  utilisé est l'ensemble des 10 plus courts chemins de la source à la destination, et les délais correspondent, pour toutes les commodités, au plus long délai de l'ensemble des chemins de l'instance multiplié par 1.1.

Dans un premier test, illustré Figure 2a, nous avons comparé les performances de 4 relaxations, dans lesquelles la fonction non-convexe présente dans les Contraintes (6) était remplacée par différents sous-estimateurs convexes :

- les fonctions  $\check{f}_{\mathcal{X}} \left( \frac{c_a - u_a}{c_a}, \frac{l_a^p}{c_a}, \frac{1 - u_p^k}{c_a}, \frac{l_a}{c_a} \right)$  (notée "Env. Convexe" dans les graphiques),



(a) Gains relatifs des différentes relaxations par rapport à la relaxation big-M.



(b) Gains relatifs des gaps d'optimalité pour la résolution du problème  $DCMCF$ , en intégrant les différentes contraintes, par rapport à la relaxation big-M.

- les fonctions  $s_{\frac{c_a - u_a}{c_a}, \frac{l_a^p}{c_a}}$  (notée "S")
- la fonction  $t_{\frac{c_a - u_a}{c_a}, \frac{c_a - b^k u_p^k}{c_a}}$  (notée "T").

La Figure 2a présente les gains relatifs des différentes relaxations par rapport à la relaxation Big-M :  $\frac{\gamma_{big-M}^* - \gamma_{relax}^*}{\gamma_{big-M}^* - \gamma_{heur.}}$ , où le terme  $\gamma_{relax}^*$  désigne la solution optimale d'une relaxation et  $\gamma_{heur.}$  désigne une solution heuristique. La relaxation  $DCMCF_{env}$  est, comme on peut s'y attendre, plus resserrée que les relaxations S ou T qui n'utilisent qu'une des trois fonctions composant l'enveloppe convexe étudiée Section 3.4. Parmi ces deux relaxations, on constate qu'il n'existe pas de domination claire, ce qui est cohérent avec le fait que la relation entre les fonctions  $s_{\epsilon, \theta}$  et  $t_{\epsilon, \zeta}$  dépende des valeurs de leurs variables  $x$  et  $y$  (et donc de l'utilisation des chemins et de la charge des arcs). Toutes ces relaxations, enfin, sont plus resserrées que la relaxation Big-M.

Dans un second test, nous avons comparé les apports des nouvelles contraintes dans un algorithme de branch-and-bound. La Figure 2b montre la réduction du gap permise par chaque type de contraintes par rapport au Big-M, pour un temps de résolution limité à une heure :  $\frac{gap_{relax.} - gap_{big-M}}{gap_{big-M}}$  (où  $gap_{relax.}$  désigne le gap obtenu après 1 heure en intégrant les contraintes liées à une relaxation). Bien que la relaxation convexe soit plus resserrée, il apparaît clairement que sa complexité la rend peu performante pour résoudre le problème  $DCMCF$ . Une implémentation plus parcimonieuse de cette relaxation, ajoutant des contraintes de délais relâchées quand elles sont violées, est en revanche plus efficace que la relaxation Big-M sur une large majorité des instances.

## 6 Conclusions et perspectives

Les travaux présentés dans cette étude permettent d'améliorer les connaissances théoriques du problème de maximisation de flux multi-commodités sous contraintes de délais, en proposant une meilleure caractérisation de la complexité du problème ainsi qu'une méthode permettant de calculer des bornes supérieures et inférieures fiables en un temps polynomial. Il sera possible de prolonger ce travail en améliorant la performance de la relaxation convexe étudiée afin de permettre la résolution exacte du problème  $DCMCF$ , ainsi qu'en examinant des heuristiques polynomiales plus efficaces en pratique que celle décrite Section 4.

## Références

- [1] S. Beker, D. Kofman, and N. Puech. Off-line mpls layout design and reconfiguration : Reducing complexity under dynamic traffic conditions. In *International Network Optimization Conference (INOC)*, pages 61–66, 2003.
- [2] W. Ben-Ameur and A. Ouorou. Mathematical models of the delay constrained routing problem. *Algorithmic Operations Research*, 1(2) :94–103, 2006.
- [3] H. Hijazi, P. Bonami, G. Cornuéjols, and A. Ouorou. Mixed integer nonlinear programs featuring "on/off" constraints : convex analysis and applications. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 36 :1153–1160, 2010.
- [4] H. Hijazi, P. Bonami, and A. Ouorou. An outer-inner approximation for separable minlps. *LIF*, 2010.